Corrigé

Les solutions de l'équation $y' = ay$, où a est un réel non nul, sont définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle. Ainsi :

1. $\sqrt{3}y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{3}}y \Leftrightarrow y' = -\frac{\sqrt{3}}{3}y$, on est donc dans le cas $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Les solutions de $\sqrt{3}y' + y = 0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{3}x}$, où C est un réel. On détermine C tel que $y\left(\sqrt{3}\right) = \frac{1}{\mathrm{e}^3} \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}} = \frac{1}{\mathrm{e}^3} \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}^3} \Leftrightarrow C = \mathrm{e}^{-2}$. Ainsi, la solution cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \mathrm{e}^{-2} \times \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{3}x} = \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}x}{3}-2}$.

2. $y' - \pi^2 y = 0 \Leftrightarrow y' = \pi^2 y$, on est donc dans le cas $a = \pi^2$. Les solutions de $y' - \pi^2 y = 0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{\pi^2 x}$, où C est un réel. On détermine C tel que $y\left(\frac{1}{\pi}\right) = \pi \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{\pi^2\times\frac{1}{\pi}} = \pi \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{\pi} = \pi \Leftrightarrow C = \pi\mathrm{e}^{-\pi}$. Ainsi, la solution cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \pi\mathrm{e}^{-\pi} \times \mathrm{e}^{\pi^2 x} = \pi\mathrm{e}^{\pi^2 x - \pi}$.